

Title	有眼群の部分群の作る束について
Author(s)	鈴木, 通夫
Citation	全国紙上数学談話会. 2(4) p.64-p.68
Issue Date	1947-03-25
oaire:version	VoR
URL	https://doi.org/10.18910/75169
rights	
Note	

Osaka University Knowledge Archive : OUKA

<https://ir.library.osaka-u.ac.jp/>

Osaka University

34. 有限群の部分群の作る束について

(東大) 鈴木 通夫

群の部分群は含む含まれるの関係によつて束を作ることはよく知られて居ります。この束は群の構造と相當密接な関係がある係に思はれます。以下この束と群との間の二三の関係特に束が同型になる二つの群の関係について少し詳しく見たいと思ひます。証明はあまり簡単ではありませんでしたので、詳細は後にゆづらせて頂きます。

1. 群 G の部分群の束を (P, \supseteq) と書きます。

Lemma 1. $L(G) = L_1 \times L_2$ と束の直積になつて居れば
 $L_1 \cong L(\psi_1)$, $L_2 \cong L(\psi_2)$ なる部分群 ψ_1, ψ_2 があり.

$$G = \psi_1 \times \psi_2$$

こゝで ψ_1 と ψ_2 の位数は互に素である。逆もよい。

(逆の方は岩澤先生によつて既に知られて居ります。この Lemma は本田さんの御注意によるものです。) G の中で L_1, L_2 に対応する部分群を ψ_1, ψ_2 とし、その中から任意の元 H_1, H_2 を取れば $L \{H_1, L \{H_2\}$ と共に $L(\{H_1\} \cup \{H_2\})$ が分配束だから $H_1 H_2 = H_2 H_1$

定理 1. L を任意の有限束とする。 L が直積因子として 鎖を含まなければ $L(G) \cong L$ なる群 G は高々有限個しかない。

L が既約且鎖でない場合だけを考へれば充分です。 $L(G) \cong L$ なる群 G の位数が素数 p^n だとすれば G は巡回群ではありませんから $G/\Phi G$ (ΦG は G の重部分群) を考へれば p が足まり、 L の次元から n が定まりますから G の位数が L によりきまります。 G の位数が素数 p でないとすると素因子 p の p -Sylow-群 ψ を考へます。 ψ が不変部分群でないならばその共軛群の数は $\equiv 1 \pmod{p}$ で束が與へられて居る以上、 p は有限個 p 可能値しかありません。 ψ が不変ならば Schur の定理 (Zassenhaus の教科書 IV 定理 25) によりまして ψ は $G/\Phi G$ に同型な部分群 ψ_0 を持ちます。 L が既約ですから ψ_0 は不変部分群ではなく (Lemma 1) ψ_0 の共軛群の数は p -巾でこの場合も p は有限個しかありません。即ち ψ の位数の素因子は有限通りしかなく、各々の素因子の取る最高巾は明らかに L の次元により小さいのですから G は高々有限個。

定理 1 によりますと束を與へると群の構造は殆んど確定してしまふことが分かります。そこで束の同型な二つの群の位数に関することを調べてみます。

2. G の位数が素数 q の三乗であつたとします。すると容易に、 G が (q, q, q) 型の Abel 群でないならば $L(G) \cong L(G')$ なる G' の位数は又素数の三乗であることが分かります。特に G が巡回群でな

いならば φ の位数も q^3 であります。2 のことから一般に

定理 2. φ の位数を素数 q^n とする。 $L(\varphi) \cong L(\varphi')$ なる L

φ' は φ が (q, \dots, q) 型の Abelian 群でないならば 素数 p^n である。 φ が巡回群でなければ $p = q$ 。 φ が (q, \dots, q) 型の Abelian 群ならば、 φ は (q, \dots, q) 型の Abelian 群であるか又は (μ は素数)

$$\varphi' = \varphi \varphi' \quad \varphi \text{ は } (q, \dots, q) \text{ 型の Abelian 群 } \varphi' = \langle Q \rangle \text{ と } Q^2 = 1$$

$$P \in P \text{ に対して } Q^{-1} P Q = P^\mu \quad \mu \equiv 1 \quad \mu^2 \equiv 1 \pmod{q}$$

即ち φ は岩澤先生の P -群である。

ことが *Induction* により証明されます。この定理によれば P -群は或る意味で束論的に特徴付けられるのですが、束 L の元 A に対して A の下に素な元全体の交を群論に於ける様に $\cap A$ とでも表はすことにすると L のすべての元について $A/\cap A$ なる区間が既約す補モヅル束となる束 L に対応する群は P -群及び

$$\varphi = \langle P, Q \rangle \quad P P^n = Q^2 = 1 \quad Q^{-1} P Q = P^\mu \quad \mu \equiv 1 \quad \mu^2 \equiv 1$$

なる群を除いて素数 q 位の群になります。全体について仮定しなくても L の最大元 I についてだけ仮定しても或る程度素数 q 位の群を特徴づけます。

3. 二つの群 φ と φ' が $L(\varphi) \cong L(\varphi')$ なる時 φ と φ' とは束同型と云ふことにします。定理 2 により φ の p -Sylow 群 γ に対応する φ' の部分群は一般に p -Sylow 群になります。例外は γ が (P, \dots, P) 型の Abelian 群及び巡回群の場合であります。この場合は Sylow 群が割合簡単な構造を有つて居りますからもつとくはしく調べる事が出来ます。

Lemma 2 φ と φ' とは束同型。 φ の p -Sylow 群 γ が φ の不変部分群とする。 φ と φ' との束同型対応で γ に対応する φ' の部分群が素数 q 位の群でなかつたとする。その時

i) φ の中に γ を含む群 ψ ($\varphi \supset \psi \supset \gamma$) $L(\psi)$ が既約す補モヅル束なるものがなければ $L(\varphi)$ が $L(\gamma)$ を他の束との直積になる。即ち γ は φ の

直積因子になる。

ii) (θ) の中に μ を含む $L(\mu)$ が既約可補モジュール束になる $\mu^{(\theta)}$ があれば $L(\theta)$ は $L(\mu)$ と他の束との直積に分解する。即ち μ が θ の直積因子になる。

この証明は γ が極大分群で $L(\theta)$ の自己同型により動くものは p -群以外にない ($L(\theta)$ の次元 ≥ 3) ことを用ひて γ が極大なる場合を証明し、 $L(\theta/\mu)$ の次元に関する *induction* によるわけだ。証明には前に着けた Schur の定理と、 p -Sylow 群 γ がその *Normalisator* の核心に入る時 $\theta/\mu \cong \gamma$ なる不変部分群 μ' があるといふ Burnside の定理が用ひられることを附記しておきます。

この Lemma を用ひれば、

定理 3 θ と θ' とが束同型とする。 θ の Sylow 群 γ に対応する θ' の群が素数位数でないならば θ と θ' との同型対応で互に対応する μ, μ' があり μ は θ の μ は θ' の不変部分群で $\theta/\mu \cong \theta'/\mu'$ 且 $L(\theta/\mu) \cong L(\theta'/\mu')$ が既約可補モジュール束になりその次元は γ の次元に等しいか又は γ の次元より一つ高い。

これを繰返して用ひれば、

定理 4 二つの群が束同型ならば位数の素因子の数は等しい。

尚くはしく

定理 5 θ と θ' とが束同型ならば、 θ と θ' との束同型で対応する μ, μ' があり それ等は θ, θ' の不変部分群で、その位数は等しく $\theta/\mu, \theta'/\mu'$ は巡回群と p -群との直積で、その位数は μ, μ' の位数と互に素になる。

少し μ の取り方を変へれば、

定理 6 θ と θ' とが束同型ならば θ と θ' との束同型對應で互に対応する μ, μ' があり それぞれ θ, θ' の不変部分群その位数は等しく $\theta/\mu, \theta'/\mu'$ は素因子分解の型の等しい位数の巡回群である。この時 μ と μ'/μ' の位数は必ずしも互に素ではないが、この拡大は各

解する。

ここで特に G が *auflosbar* である場合を考へますと P. Hall の定理によつて。

定理 7 G と H が同型且 H が *auflosbar* とすると H' も *auflosbar* になる。

ことが証明されます。

4 以上の結果は $L(G)$ の自己同型について考へるともう少しはつきりした結果を導へます。それには定理 3 を次の様に拡張します。

定理 8 G と H' との同型対応で H の Sylow 群 P が素数 n 位でない群に対応したとすると、 P を含む $L(H)$ が既約可補モジュールになる群 $L(H)^{H'}$ があれば $L(H)$ が又不変部分群になる。

これを用ひれば $L(G)$ の自己同型対応に就いて

定理 9 $L(G)$ の自己同型対応による Sylow 群が素数 n 位ではない部分群に対応したとすると $L(G)$ は既約可補モジュールであるか又は既約可補モジュールを直積因子として持つ。

ことが証明されます。従つて G が p -群を直積因子に持たなければ $L(G)$ の自己同型によつて Sylow 群は又 Sylow 群に対応するわけですが必ずしも同一の素数に対応するとは限りません。その時は H/P が $p^2 q^2$ 次の巡回群になる不変部分群 H' が存在するわけです。

単純群の場合には $L(G)$ の自己同型によつて、 p -Sylow 群は又 p -Sylow 群に対応します。この場合には H の自己同型群が $L(H)$ の自己同型群の部分群と考へられるのですが、この二つの関係はよく分つて居りません。

— 以上 —

(1947. 3. 10 受付)